A PARABOLA SIMULÓ KÖREINEK KÖZVETLEN TÁRGYALÁSA

Írta: GAZSÓ ISTVÁN

A simuló kör fogalmát középiskolai fokon nem vezetjük be, legfeljebb utalunk rá a geometriai optikában, amikor a parabolikus tükröket tárgyaljuk. A matematika főiskolai oktatásában is csak futólag találkoznak vele a hallgatók, mert többnyire későn, már csak akkor foglalkozunk vele, amikor rendelkezésünkre áll a tárgyalásához szükséges differenciálszámítás.

Ezen a helyzeten javítani kell és lehet azzal, hogy közvetlenül ismetetjük meg a hallgatókkal legalább egy görbe simuló köreit, és azokkal kapcsolatban feladatokat oldatunk meg.

Az alábbiakban bemutatok egy tárgyalást, amelyet a parabola simuló köreire vonatkozóan a főiskolai oktatás céljára kidolgoztam.

1. Előkészítés. Tárgyalásunk egyszerűsítésére alkalmazható a következő *Segédtétel*: *Ha a P pontból húzott a és b szelők egyik szögfelezője párhuzamos a parabola tengelyével, akkor az a-n fekvő A_1 és A_2, illetve b-n fekvő B_1 és B_2 metszéspontokra teljesül:*

I) $$\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_2} = \overline{PB_1}\cdot\overline{PB_2};$$

II) az A_1, A_2, B_1, és B_2 *pontok egy körön fekszenek, (konciklikusak);*

III) *az $A_1A_2B_2B_1$ négyszög súlypontja a parabola tengelyére esik.*

Bizonyítás: Tekintsük az $y^2=2px$ egyenletű parabolát és a síkjában fekvő $P_0(x_0; y_0)$ pontot.

I) Legyen a P_0-ból húzott és a parabolát metsző a egyenesnek az x tengely pozitív felével bezárt szöge α, akkor az a egy tetszőleges $P(x; y)$ pontja koordinátáit a $t=\overline{P_0P}$ távolság felhasználásával a következő egyenletek fejezik ki:

(1) $$x=x_0+t\cos\alpha, \qquad y=y_0+t\sin\alpha$$

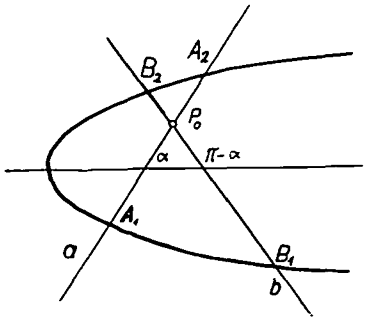
Ha b egyenes teljesíti a Segédtételben foglalt feltételt, akkor $\pi-\alpha$ szöget zár be az x tengely pozitív felével (1. *a)* és *b)* ábra). Tetszőleges pontjának koordinátáit, az előbbihez hasonlóan, a következő egyenletek fejezik ki:

(2) $$\begin{aligned} x&=x_0+t\cos(\pi-\alpha)=x_0-t\cos\alpha\\ y&=y_0+t\sin(\pi-\alpha)=y_0+t\sin\alpha. \end{aligned}$$

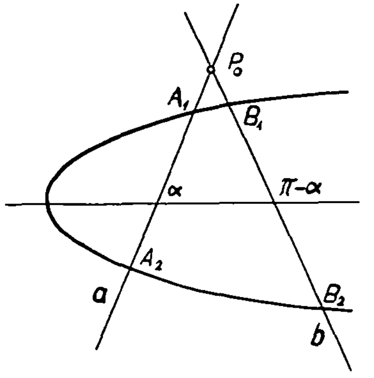
Az a egyenes és az $y^2=2px$ egyenletű, parabola A_1 és A_2 metszéspontjainak koordinátái kielégítik az

$$(y_0+t\sin\alpha)^2=2p(x_0+t\cos\alpha)$$

egyenletet.



1a ábra



1b ábra

Ebből meghatározhatjuk A_1 és A_2 koordinátáit, ha az egyenletet t-re megoldjuk. Rendezéssel kapjuk a

(3) $$t^2 \sin^2\alpha + t(2y_0 \sin\alpha - 2p\cos\alpha) + y_0^2 - 2px_0 = 0$$

egyenletet, amely t-ben másodfokú és amelynek t_1 és t_2 gyökeire egyrészt teljesül, hogy

$$\overline{P_0A_1} = t_1 \quad \text{és} \quad \overline{P_0A_2} = t_2,$$

másrészt

(4) $$\overline{P_0A_1} \cdot \overline{P_0A_2} = \frac{y_0^2 - 2px_0}{\sin^2\alpha}.$$

Hasonló módon kapjuk a b egyenes B_1 és B_2 metszéspontjainak koordinátáira vonatkozólag az

$$(y_0^2 + t\sin\alpha)^2 = 2p(x_0 - t\cos\alpha)$$

egyenletet, ebből pedig:

(5) $$t^2 \sin^2\alpha + t(2y_0 \sin\alpha + 2p\cos\alpha) + y_0^2 - 2px_0 = 0.$$

Az (5) egyenlet t_1' és t_2' gyökeire egyrészt

$$\overline{P_0B_1} = t_1' \quad \text{és} \quad \overline{P_0B_2} = t_2',$$

másrészt

(6) $$\overline{P_0B_1} \cdot \overline{P_0B_2} = t_1' \cdot t_2' = \frac{y_0^2 - 2px_0}{\sin^2\alpha}.$$

A (4) és (6) összehasonlításából következik, hogy

$$\overline{P_0A_1} \cdot \overline{P_0A_2} = \overline{P_0B_1} \cdot \overline{P_1B_2}.$$

Ezzel a segédtétel I) pontját bebizonyítottuk.

II) Az I)-ben bizonyított összefüggést írhatjuk

$$\overline{P_0A_1} : \overline{P_0B_2} = \overline{P_0B_1} : \overline{P_0A_2}$$

alakban is, ami pedig — figyelembevéve, hogy az $A_2P_0B_1\sphericalangle = B_2P_0A_1\sphericalangle$ — azt jelenti, hogy $P_0A_1B_2\triangle \sim P_0B_1A_2\triangle$. Ebből pedig következik, hogy az $\overline{A_1B_1}$ szakasz

A_2-ből és B_2-ből ugyanakkora szög alatt látszik. Tehát — a kerületi szög tételének megfordíthatósága alapján — az A_1, B_1, A_2 és B_2 pontok egy körön fekszenek.

Megjegyzés: a szóbanforgó kör középpontját megkaphatjuk a 4 pont által meghatározott 6 szakasz közül bármelyik kettő felezőmerőlegcsének metszéspontjaként, hiszen mind a 6 szakasz húrja a körnek.

A III) pont bizonyítása előtt emlékeztetünk arra, hogy egy négyszög súlypontjának koordinátáit csúcspontjai koordinátáinak számtani közepei adják. Számítsuk ki az A_1, A_2, B_1 és B_2 pontok ordinátáinak összegét.

Minthogy

$$y_{A_1} = y_0 + t_1 \sin\alpha$$

$$y_{A_2} = y_0 + t_2 \sin\alpha$$

$$y_{B_1} = y_0 + t_1' \sin\alpha$$

$$y_{B_2} = y_0 + t_2' \sin\alpha$$

ebből

$$y_{A_1}+y_{A_2}+y_{B_1}+y_{B_2}=4y_0+\sin\alpha(t_1+t_2+t_1'+t_2')$$

Másrészt a (3) és (5) egyenletekből:

$$t_1+t_2 = -\frac{2y_0\sin\alpha-2p\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$$

$$t_1'+t_2' = -\frac{2y_0\sin\alpha+2p\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$$

azaz

$$t_1+t_2+t_1'+t_2' = -\frac{4y_0}{\sin\alpha}.$$

Ez azonban azt jelenti, hogy

$$(7)\qquad y_{A_1}+y_{A_2}+y_{B_1}+y_{B_2} = 4y_0+\sin\alpha\left(-\frac{4y_0}{\sin\alpha}\right) = 0.$$

Tehát a négy pont ordinátájának összege 0, vagyis az általuk meghatározott négyszög súlypontja valóban a parabola tengelyére esik.

2. A parabolával érintkező körök.

a) Vegyük fel most a parabolán a P_0 pontot. Egyelőre zárjuk ki azt az esetet, amikor P_0 a parabola csúcsába esik.

Ha a P_0 ponton áthaladó a és b egyenesre teljesül a Segédtétel kikötése, akkor most is érvényes I), II) és III).

Az I) ugyanis $\overline{P_0A_1}=0$ és $\overline{P_0B_1}=0$ miatt nyilvánvalóan fennáll, hiszen

$$\overline{P_0A_1}\cdot\overline{P_0A_2} = \overline{P_0B_1}\cdot\overline{P_0B_2} = 0.$$

A II) szerint A_2, B_2 és $P_0(\equiv A_1\equiv B_1)$ pontok egy k körre esnek. Ez az állítás 3 nem kollineáris pontra mindig teljesül. Az A_2, B_2 és P_0 azonban jelenleg nem akármilyen pontok. Ennek megértésére vegyük fel átmenetileg a P_0 pontot igen közel a parabolához. A kapott A_1, A_2 B_1 és B_2 pontokon áthaladó $\bar{k}$ kör középpontját — a Segédtétel bizonyítása közben tett megjegyzés értelmében — meghatározhatjuk a $\overline{P_0A_1}$ és $\overline{P_0B_1}$ szakaszok felezőmerőlegeseinek metszéspontjaként is. Ha most a P_0 pontot közelítjük a parabolához, határesetben a P_0A_1 és a P_0B_1 egyenesek átmennek a P_0 ponthoz tartozó parabola-érintőbe. A határesetben eltűnő $\overline{P_0A_1}$ és $\overline{P_0B_1}$ szakaszok felezőmerőlegesei pedig átmennek a parabola P_0 pontjához tartozó normálisba.

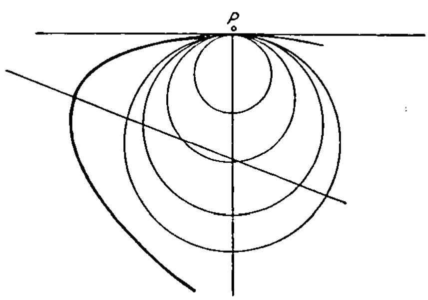
Ez azt jelenti, hogy a $\bar{k}$ kör határesetben olyan k körbe megy át, amelynek a középpontja rajta van a parabola P_0 pontjához tartozó érintőre emelt merőlegesen: tehát *a parabolának és a k körnek közös érintője van P_0-ban.*

Értelmezés: ha egy érintőnek kétszeres közös pontja van a görbével, mint a legtöbb esetben, azt mondjuk, az érintő és a görbe *elsőrendűen érintkezik.*

S minthogy a most tárgyalt esetben a parabolának és a k körnek a P_0 pontban egy kétszeres közös pontja van az érintővel, — tehát egymással is —, azt mondhatjuk, hogy *a parabola a P_0 pontban elsőrendűen érintkezik a k körrel.*

Végül teljesül a Segédtétel III) pontja is, ha a súlypont koordinátáinak számításakor a P_0 pontot kétszeresen számítjuk, annak megfelelően, hogy benne — a korábban szereplő négy pont közül — kettő, A_1 és B_1 egybeesik.

b) Rögzítsük a $P_0(x_0; y_0)$ pontot, ellenben forgassuk a rajta áthaladó a-t és vele szemben b-t is úgy, hogy a Segédtétel kikötése továbbra is teljesüljön, azaz, hogy az a és b egyenesek egyik szögfelezője párhuzamos legyen a parabola tengelyével. Az így kapott egyenespárok olyan pontokat metszenek ki a parabolából, hogy a rajtuk és a P_0 ponton áthaladó körök középpontjai rajta vannak a parabola P_0 pontjához tartozó normálison. Más szóval: az így kapott körök mindegyikét érinti a parabola P_0 pontjához tartozó érintő. — Ezt az eredményt úgy is kifejezhetjük: *ezek a körök mind elsőrendűen érintkeznek a parabolával a P_0 pontban.*



2. ábra

3. A parabola simuló körei.

Vegyük fel végül úgy az a egyenest, hogy egybeessék a parabola P_0 pontjához tartozó e érintővel. Ebben az esetben az A_2 pont is a P_0 pontba kerül. Tehát a korábban szereplő 4 pont közül már három pont (A_1, A_2 és B_1) egybeesik a parabola P_0 pontjával. Az a egyenes érintőbe való elforgatásának megfelelő olyan b egyenes, amely teljesíti a Segédtétel kikötését, a P_0 ponton kívül metszi még egy B_2 pontban a parabolát.

Ebben a különleges esetben is érvényesek a Segédtétel állításai.

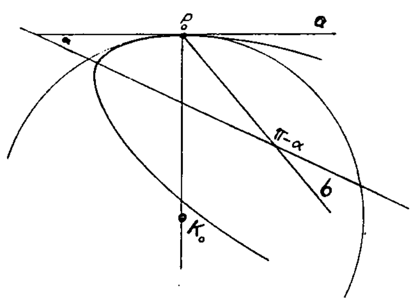
Van egy és csak egy olyan kör, amelyet meghatároz e határhelyzet: a P_0 pontban egybeeső A_1, A_2 és B_1 pontok és a rajtuk kívül eső B_2 pont. Ezt a kört nevezzük *a parabola P_0 pontjához tartozó simuló körnek,* vagy *görbületi körnek.*

Ha figyelembe vesszük a simuló körnek a közös érintőre vonatkozó tükörképét is, továbbá a parabolát a P_0 pontban belülről és kívülről érintő összes köröket, azt mondhatjuk: *a simuló kör az egyetlen olyan kör, amelynek a P_0 pontban háromszoros közös pontja van a parabolával és azon kívül is van még közös pontja a parabolával.*

Ez utóbbi tulajdonsága miatt a simuló kört *másodrendűen érintkező körnek* is nevezzük.

4. A parabola simuló körének néhány tulajdonsága.

1° A simuló kör értelmezéséből következik, hogy miközben P_0 pontban háromszoros közös pontban érinti — ugyanott *metszi* is a parabolát (3. ábra).



3. ábra

2° A simuló kör tehát *részben a parabola belsejében, részben a külsejeben halad.*

3° A parabola szimmetriája miatt *vannak olyan pontok a parabolán, amelyekhez ugyanakkora sugarú simuló körök tartoznak.* Ha a parabola egyenletét $y^2=2px$ alakban írtuk fel, azt mondhatjuk: az egyenlő abszcisszájú pontok simuló körei egyenlő sugarúak.

5. A csúcspont simuló köre.

Vegyük szemügyre most azt az eddig ideiglenesen kizárt esetet, amikor a $P_0(x_0; y_0)$ pontot a parabola csúcsában vesszük fel. Minthogy a parabola csúcsérintője merőleges a tengelyére, itt az a egyenes csak akkor válik érintővé, ha $\alpha=\frac{\pi}{2}$, így a Segédtétel szerint hozzá rendelt b-nek a tengellyel bezárt β szögére teljesül a

$$\beta=\pi-\alpha=\pi-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}.$$

Ez azt jelenti, hogy b is merőleges a tengelyre, tehát az a és b egybeesik. Vagyis ebben a kivételes esetben az A_1, A_2, B_1 és B_2 pontok mind egybeesnek a parabola P_0 pontjában. Eszerint:

a csúcshoz tartozó simuló körnek a csúcspontban négyszeres közös pontja van a parabolával. Ekkor azt mondjuk, hogy a két görbe *harmadrendűen érintkezik.*

A simuló kör 4.-ben említett tulajdonságai közül az 1° és 2° nem vonatkozik a csúcshoz tartozó simuló körre. Ez ugyanis nem metszi a parabolát, (körnek és parabolának legfeljebb 4 közös pontja lehet) és teljes egészében annak beljesében halad. — A 3° pedig semmitmondó. Ennek ellenére a csúcshoz tartozó simuló kör is egyértelműen meghatározott. Alább megmutatjuk, hogy sugara és középpontja kiszámítható.

6. A parabola és a simuló kör közös húrja.

Tétel: Az $y^2=2px$ egyenletű parabola $P_0(x_0;y_0)$ pontjához tartozó simuló körnek még egy Q közös pontja van a parabolával, ennek koordinátái: $X_Q=9x_0$; $Y_Q=-3y_0$; és a P_0Q közös húrt tartalmazó h egyenes egyenlete:

$$h\equiv(y-y_0)\cdot y_0+p(x-x_0)=0. \tag{8}$$

Bizonyítás: A Segédtétel III) pontja alapján — és mivel P_0 pont háromszoros, az y_0-t is háromszorosnak kell vennünk — felírhatjuk a (7) szerint a

$$3y_0+Y_Q=0 \text{ egyenletet,}$$

amiből: $Y_Q=-3y_0$.

Mivel pedig Q pont rajta van a parabolán, teljesül

$$Y_Q^2=2pX_Q, \text{ azaz } \quad (-3y_0)^2=2pX_Q \text{ is,}$$

amiből: $9y_0^2=2pX_Q$ és $y_0^2=2px_0$ miatt

$$9\cdot 2px_0=2pX_Q, \qquad \text{tehát: } X_Q=9x_0.$$

A $\overline{P_0Q}$ közös húrt tartalmazó h egyenes egyenletét legegyszerűbben annak figyelembevételével írhatjuk fel, hogy a parabola $P_0(x_0;y_0)$ pontjához tartozó e érintő egyenlete, mint ismeretes

$$e\equiv(y-y_0)y_0-p(x-x_0)=0. \tag{9}$$

Az α és $\pi-\alpha$ szögek miatt az e illetve h egyenesek iránytangense csak előjelben tér el egymástól, továbbá mivel h is átmegy a $P_0(x_0;y_0)$ ponton, egyenlete valóban

$$h\equiv(y-y_0)y_0+p(x-x_0)=0,$$

amit bizonyítani kellett.

Ezt az egyenletet kielégíti a $P_0(0;0)$ ponthoz tartozó elfajult eset is, ha az ide tartozó érintő egyenletét annak figyelembe vételével írjuk fel, hogy $x=0$.

7. A simuló kör középpontja.

Tétel: Az $y^2=2px$ egyenletű parabola $P_0(x_0;y_0)$ pontjához tartozó simuló kör K_0 középpontjának koordinátái:

$$X_0=3x_0+p; \; Y_0=-\frac{y_0^3}{p^2} \tag{10}$$

Bizonyítás: a) Induljunk ki először abból, hogy K_0 rajta van a parabola P_0 pontjához tartozó n normálison, amit az ide tartozó e érintő (9)-ben felírt egyenlete alapján írhatunk fel, annak figyelembevételével, hogy merőleges az érintőre. Az n normális egyenlete tehát:

$$n\equiv(x-x_0)y_0+p(y-y_0)=0 \tag{11}$$

Másrészt K_0 rajta van a közös húr felezőmerőlegesén is. Ahhoz, hogy ennek egyenletét felírhassuk, előbb kiszámítjuk a közös húr F felezőpontjának koordinátáit, P_0 és Q koordinátái segítségével.

$$X_F = \frac{x_0+9x_0}{2} = 5x_0; \qquad Y_F = \frac{y_0-3y_0}{2} = -y_0. \tag{12}$$

Így tehát az F-en átmenő s a (8)-cal felírt h egyenesre merőleges egyenlete:

$$f \equiv -y_0(x-5x_0)+p(y+y_0)=0. \tag{13}$$

Az n és f egyenesek metszéspontjának koordinátáit tehát a (11) és (13) egyenletekből képzett egyenletrendszer adja.

Rendezéssel kapjuk a következő egyenleteket:

$$\begin{aligned} y_0x+py-y_0(x_0+p)&=0\\ -y_0x+py+y_0(5x_0+p)&=0, \end{aligned}$$

amiből:

$$X_0 = \frac{y_0p(5x_0+p+x_0+p)}{2y_0p} = 3x_0+p$$

$$Y_0 = \frac{y_0^2(x_0+p-5x_0-p)}{2y_0p} = \frac{-4x_0y_0}{2p} = -\frac{y_0^3}{p^2}.$$

b) A simuló kör fogalmának más görbékre való általánosíthatósága szempontjából érdemes megmutatnunk, hogy a most kapott képletekhez eljuthatunk a Segédtétel nélkül is.

A P_0 pontban eltűnő szakaszok $(\overline{A_2A_1}; \overline{A_2P_0}$ és $\overline{A_1P_0})$ felezőmerőlegesei helyett tekintsük általában a parabola egy $P_1(x_1; y_1)$ pontjába, továbbá a $P_0(x_0; y_0)$ pontba emelt normálisok egyenlete által kapott következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} y_1(x-x_1)+p(y-y_1)&=0\\ y_0(x-x_0)+p(y-y_0)&=0 \end{aligned}$$

E két normális M metszéspontjának koordinátáit az egyenletrendszer következő megoldása adja:

$$X_M = p+\frac{y_0^2+y_0y_1+y_1^2}{2p}; \qquad Y_M = -\frac{y_0y_1(y_0+y_1)}{2p^2} \tag{14}$$

(A rendezésnél felhasználtuk, hogy $x_1=\frac{y_1^2}{2p}; x_0=\frac{y_0^2}{2p}.$)

Közelítsük most a P_1 pontot P_0-hoz, akkor x_1 közeledik x_0-hoz, y_1 pedig y_0-hoz. S így — ha még az $y^2=2px_0$ összefüggést is felhasználjuk —, X_M-re és Y_M-re ismét a (10)-ben szereplő képleteket nyerjük.

Megjegyzés: Az $O(0; 0)$ csúcspont simuló körének középpontjára vonatkozólag az $X_O=p$ és $Y_O=0$ értékeket nyerjük.

8. A simuló kör sugara és egyenlete.

Tétel: Az $y^2=2px$ egyenletű parabola $P_0(x_0; y_0)$ pontjához tartozó simuló kör sugara:

(15) $$\varrho_0 = \frac{1}{p^2}\sqrt{(p^2+y_0^2)^3}$$

Bizonyítás: A P_0 és a hozzá tartozó simuló kör K_0 középpontjának koordinátái segítségével egyszerűen kiszámíthatjuk a simuló kör sugarát, két pont távolsága szerint:

$$\varrho_0^2 = (x_0 - X_0)^2 + (y_0 - Y_0)^2$$

$$\varrho_0^2 = (x_0 - p - 3x_0)^2 + \left(y_0 + \frac{y_0^3}{p^2}\right)^2.$$

Az $y^2 = 2px_0$ miatt $2x_0 = \frac{y_0^2}{p}$-t írhatunk s így:

$$\varrho_0^2 = \frac{1}{p^4}(p^6 + 3y_0^2p^4 + 3y_0^4p^2 + y_0^6) = \frac{1}{p^4}(p^2 + y_0^2)^3,$$

amiből

$$\varrho_0 = \frac{1}{p^2}\sqrt{(p^2+y_0^2)^3}.$$

Annak megfelelően, hogy a simuló kört görbületi körnek is nevezzük, sugarát *görbületi sugárnak*, reciprok értékét, $\frac{1}{\varrho}$-t pedig *a görbület mértékének* nevezzük.

A (15) alapján megállapíthatjuk, hogy a parabola görbülete annál nagyobb, minél kisebb ordinátájú pontját tekintjük. Legkisebb $y_0 = 0$ esetén, azaz a csúcspontban, amikor a görbületi sugár $\varrho = p$, a parabola paramétere. Ugyanitt a görbület mértéke: $\frac{1}{p}$.

Tétel: Az $y^2 = 2px$ egyenletű parabola $P_0(x_0; y_0)$ pontjához tartozó simuló kör egyenlete:

(16) $$(x - p - 3x_0)^2 + \left(y + \frac{y_0^3}{p^2}\right)^2 = \frac{1}{p^4}(y_0^2 + p^2)^3.$$

Bizonyítás: Írjuk a kör $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ alakú egyenletébe a és b helyére a (10)-ben, r helyére a (15)-ben kapott értékeket, így a (16) egyenletet nyerjük.

Megjegyzés: Ha a felírt egyenletű körnek az $y^2 = 2px$ egyenletű parabolával való metszéspontjait meg akarjuk határozni, célszerű az $x = \frac{y^2}{2p}$ alapján kiküszöbölni x-et, s ehhez hasonlóan x_0-t is. Az így kapott y-ban negyedfokú egyenletet rendezve

(17) $$(y - y_0)^3 \cdot (y + 3y_0) = 0$$

alakúra hozhatjuk.

Ebből az egyenletből algebrai úton is megállapíthatjuk, amit eddig csak geometriai megfontolások alapján tudtunk, hogy: a simuló körnek az y_0 ordinátájú pontban 3 összeeső közös pontja van a parabolával, azonkívül metszi még azt a $(-3y_0)$ ordinátájú pontjában.

9. A parabola evolutája.

Tétel: Az $y^2=2px$ egyenletű parabola pontjaihoz tartozó simuló körök középpontjainak mértani helye a

$$8(x-p)^3=27py^2 \tag{18}$$

egyenletű görbe.

Bizonyítás: Küszöböljük ki az $X=p+3x_0$ és $Y=-\frac{y_0^3}{p^2}$ képletekből előbb x_0-t az $x_0=\frac{y_0^2}{2p}$ alapján, majd az y_0-t is X és Y által:

$$X=\frac{3y_0^2}{2p}+p; \quad Y=-\frac{y_0^3}{p^2}; \quad y_0^2=\frac{(X-p)\cdot 2p}{3}; \quad -y_0^3=p^2Y$$

amiből:

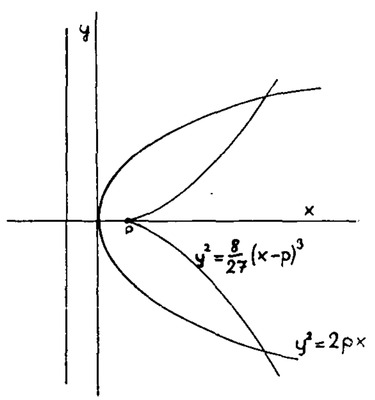
$$y_0^6=\frac{8(X-p)^3p^3}{27}; \quad y_0^6=p^4Y^2;$$

$$\frac{8(X-p)^3p^3}{27}=p^4Y^2$$

és igy

$$8(X-p)^3=27pY^2.$$

Megjegyzés: A kapott egyenlet felhasználásával előállíthatjuk a parabola simuló köreinek középpontja által leírt görbét (4. ábra), amit a parabola *evolutájának*



4. ábra

nevezünk. Általában is: egy görbe evolutájának nevezzük a simuló körei középpontjai által meghatározott görbét. Ennek a görbének sok érdekes kapcsolata van az eredeti görbével. Közülük itt most csak azt említjük meg, ami a tárgyalásból is következik: az eredeti görbe normálisai érintői az evolutának. A parabola evolutája eszerint úgy is felfogható, mint a parabola normálisai által burkolt görbe.

10. A parabola alakjának megközelítése simuló körökkel.

Minthogy a parabola egy P_0 pontjában érintkező körök közül a simuló kör érintkezik vele legszorosabban (3 pontban), a simuló kör középpontjára és sugarára kapott eredményeinket felhasználhatjuk a parabola alakjának megközelítésére. Erre például olyan gyakorlati feladatok megoldása közben lehet szükség, amikor nem mindegy, hogy mekkora méretű parabolát rajzolunk, tehát sablonokat nem alkalmazhatunk, illetve előbb jó sablont kell készítenünk, hogy aztán felhasználjuk. Nyilvánvaló, hogy a megközelítés annál pontosabb lesz, minél közelebb eső parabolapontok simuló köreit szerkesztjük meg.

Az 1. táblázat tartalmazza az $y^2=2px$ egyenletű parabola

$$x_0=0; \quad x_1=\frac{1}{2}p; \quad x_2=\frac{2}{2}p; \quad x_3=\frac{3}{2}p; \quad \dots \quad x_n=\frac{n}{2}p$$

abszcisszájú pontjaihoz tartozó $y_n=\sqrt{2px_n}$ ordinátákat, továbbá a simuló kör középpontjának $X_n=3x_n+p$ és $Y_n=-\frac{y_n^3}{p^2}$ koordinátáit és $\varrho_n=\sqrt{\frac{(2x_n+p)^3}{p}}$ sugarát.

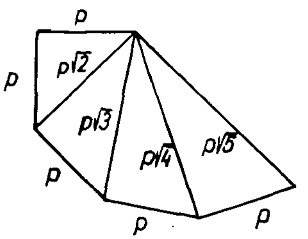
Szembetűnő táblázatunkban, hogy Y_n és ϱ_n értékei hasonló sorozatot adnak. Csupán annyi a különbség közöttük, hogy

$\varrho_0=-Y_1$; $\varrho_1=Y_2$;... általában: $\varrho_n=-Y_{n+1}$.

Ennek figyelembevételével a következő — aránylag egyszerű — eljárást írhatjuk elő a parabola alakjának simuló körökkel való megközelítésére:

1. Mérjük fel a megrajzolandó parabola tengelyére csúcsától kezdve az adott p-nek megfelelő $\frac{1}{2}p$, $\frac{2}{2}p, \dots \frac{n}{2}p$ beosztást.

2. Állítsunk merőlegeseket a tengelyre a kapott osztáspontokban és mérjük fel rá a megfelelő $p\sqrt{1}, p\sqrt{2}, \dots p\sqrt{n}$ ordinátákat, melyeket legegyszerűbben az 5. ábra szerint szerkeszthetünk meg.



5. *ábra*

3. Szerkesszük meg az $K_0(p; 0)$ középpontú p sugarú kört, ez a parabola csúcsához tartozó harmadrendűen érintő kör.

4. Tűzzük a körzőt az $K_1\left(\frac{5}{2}p; -p\right)$ pontba és vegyük körzőnyílásba a $\varrho_1=$ $=\overline{K_1P_1}$ távolságot; szerkesszük meg a P_1-en áthaladó simuló kört, majd ennek tükörképét is a tengelyre vonatkozóan.

1. táblázat

Index	x_n	y_n	X_n	Y_n	ϱ_n
0	0	0	$\frac{2}{2}p$	0	p
1	$\frac{1}{2}p$	$p\sqrt{1}$	$\frac{5}{2}p$	$-p$	$2\sqrt{2}\,p$
2	$\frac{2}{2}p$	$p\sqrt{2}$	$\frac{8}{2}p$	$-2\sqrt{2}\,p$	$3\sqrt{3}\,p$
3	$\frac{3}{2}p$	$p\sqrt{3}$	$\frac{11}{2}p$	$-3\sqrt{3}\,p$	$4\sqrt{4}\,p$
4	$\frac{4}{2}p$	$p\sqrt{4}$	$\frac{14}{2}p$	$-4\sqrt{4}\,p$	$5\sqrt{5}\,p$
n	$\frac{n}{2}p$	$p\sqrt{n}$	$\frac{3n+2}{2}p$	$-n\sqrt{n}\,p$	$(n+1)\sqrt{n+1}\,p$

5. Tartsuk meg a ϱ_1 távolságot, tűzzük a körzőt a tengely $\left(\frac{8}{2}p;\ 0\right)$ pontjába és jelöljük ki K_2-t és K_2'-t. Vegyük körzőbe a $\varrho_2=\overline{K_2P_2}$ távolságot, szerkesszük meg vele a P_2-n és P_2'-n áthaladó simuló köröket.

6. A ϱ_2 távolságot megtartva tűzzük a körzőt a tengely $\left(\frac{11}{2}p;\ 0\right)$ pontjába és jelöljük ki K_3-at és K_3'-t. Stb.

Megjegyzések:

a) Célszerű a rajzot négyzethálós papiron készíteni. Ezzel meggyorsítható a tengelyen fekvő $\frac{n}{2}p$ pontok és az ide állított merőlegesek felvétele.

b) A parabola alakja már néhány simuló kör megszerkesztése után kirajzolódik. A 6. ábra mindössze 5 simuló kör megszerkesztésével készült.

c) A szerkesztésből következik, hogy minden k_n kör, amelynek középpontja a tengelyre vonatkozóalg ugyanazon a félsíkon fekszik, teljes egészében tartalmazza az összes előző $k_0, k_1, \ldots k_{n-1}$ simuló köröket.

d) A simuló körök sugara gyorsan növekszik. Tehát több simuló kör felvételéhez nagy papirra van szükség.

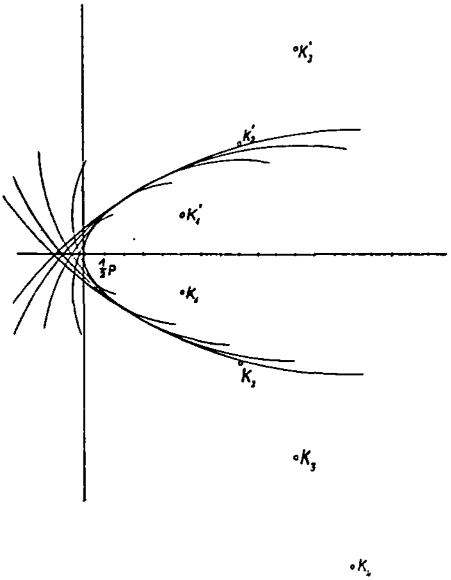
e) Ha $p=1$, vagyis ha az $y^2=2x$ egyenletű parabola táblázatát készítjük el

$$\text{a } \sqrt{0},\ \sqrt{1},\ \sqrt{2},\ \sqrt{3}, \ldots \sqrt{n} \text{ abszcisszájú pontokhoz}$$

$$\text{akkor a } 0,\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{2},\ \frac{3}{2}, \ldots \frac{n}{2} \text{ ordinátákat nyerjük.}$$

A simuló körök sugarainak sorozata pedig

$$1\sqrt{1},\quad 2\sqrt{2},\quad 3\sqrt{3},\ \ldots\ (n+1)\sqrt{n+1} \text{ lesz,}$$



6. *ábra*

amit felírhatunk így is: $\sqrt{1^3}$, $\sqrt{2^3}$, $\sqrt{3^3}$, ... $\sqrt{(n+1)^2}$.

Ezzel a köbszámok négyzetgyökeiből álló sorozat egy érdekes geometriai jelentését nyertük.

Ez az eredmény is rávilágít a *d)*-ben tett megjegyzésünkre. Amíg ugyanis az ordináták csak a természetes számok négyzetgyökei szerint növekednek, a hozzájuk tartozó simuló körök sugarai már a következő számok köbeinek négyzetgyökei szerint.

11. A megközelítés javítása.

Minthogy messzire nehezen tudjuk követni a parabolát, technikai okokból, a simuló körök sugarának gyors növekedése miatt, felmerül az igény, hogy akkor legalább a közelben levő íveit közelítsük meg minél pontosabban.

Osszuk a p paramétert r egyenlő részre! Készítsük el az egyes osztáspontokhoz tartozó x_n, y_n, X_n, Y_n és ϱ_n-re a 2. táblázatot.

a) Mutassuk ki, hogy Y_n és ϱ_k értéke páratlan r esetén nem lehet egyenlő!

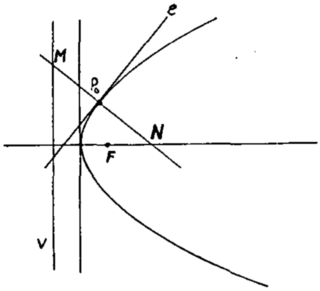
b) Mutassuk ki, hogy páros r esetén $\varrho_{n-\frac{r}{2}} = Y_n$!

c) Készítsük el egy páros r esetére a 3. táblázatot és annak alapján állapítsunk meg egy eljárást a parabola alakjának simuló körökkel való megközelítésére vonatkozólag!

12. Néhány feladat az érintett fogalmak és kérdések további vizsgálatára és alkalmazására:

a) Vizsgáljuk meg, milyen módosítással érvényes a Segédtétel ellipszisre és hiperbolára!

b) Mutassuk ki, hogy a parabola simuló körének sugara kifejezhető a $\varrho = \frac{n_0^3}{p^2}$ képlettel is, ahol n_0 jelenti a parabola P_0 pontjában emelt normálisnak a parabola tengelyén levő N metszéspontjáig terjedő $\overline{P_0N}$ szakaszát, p pedig a paramétert! (Keressünk összefüggést n_0, y_0 és p között!)



7. *ábra*

c) Bizonyítsuk be Steiner tételét, mely szerint: a parabola tetszőleges P_0 pontjához tartozó simuló kör sugara kétszerese a P_0 pont normálisán a P_0-tól a normális és a vezérvonal M metszéspontjáig mért $\overline{P_0M}$ távolságnak!

d) Mutassuk ki, hogy a parabola P_0-hoz tartozó simuló körének sugara akkora, mint a P_0-ban emelt normálisnak a parabola tengelyén levő N és a vezéregyenesén levő M metszéspontjai által meghatározott $\overline{NM}$ szakasz!

e) Állapítsunk meg szerkesztési eljárásokat a P_0-hoz tartozó simuló kör középpontjának szerkesztésére vonatkozólag a *c)* és *d)* feladatok alapján!

TÁJÉKOZTATÓ IRODALOM:

Cranz, Carl, Synthetisch-geometrische Theorie der Krümmung von Kurven und Flächen 2. Ordnung, Stuttgart, 1896.

Kárteszi Ferenc, Az ellipszis, Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok, XI. 1935.

Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok feladatanyaga, különösen a IV. és XI. évf.-é.

Salmon—Fiedler, Analytische Geometrie der Kegelschnitte, I—II. Leipzig, 1912.

НЕПОСРЕДСТВЕННОЕ ОБСУЖДЕНИЕ КРУГОВ КРИВИЗНЫ ПАРАБОЛЫ

И. Гажо

Понятие кругов кривизны параболы в средней школе вообще не изучается, а в обучении математике в techинституте оно проходится только мимоходом. А с точки зрения практического отношения вопроса намного подробнее надо было бы заниматься с ним. Автор показывает метод, который он выработал для обучения в techинституте по вопросам кругов кривизны параболы.

DIREKTE BEHANDLUNG DER SCHMIEGUNGSKREISE DER PARABEL IM UNTERRICHT

Von I. GAZSÓ

Der Begriff des Schmiegungskreises wird auf der Stufe der Mittelschule überhaupt nicht, und auch im mathematischen Hochschulunterricht nur flüchtig berührt. In Anbetracht der praktischen Beziehungen des Problems wäre es angebracht, sich mit den Schmiegungskreisen eingehender zu beschäftigen. Es wird ein vom Verfasser zur Behandlung der Schmiegungskreise der Parabel im Hochschulunterricht ausgearbeitetes Verfahren dargestellt.